**اسلاید ۱:**

## فصل ۹: جمع تجمیعی و نمودارهای کنترل میانگین متحرک با وزن متوسط

فهرست مطالب فصل

اسلاید ۲

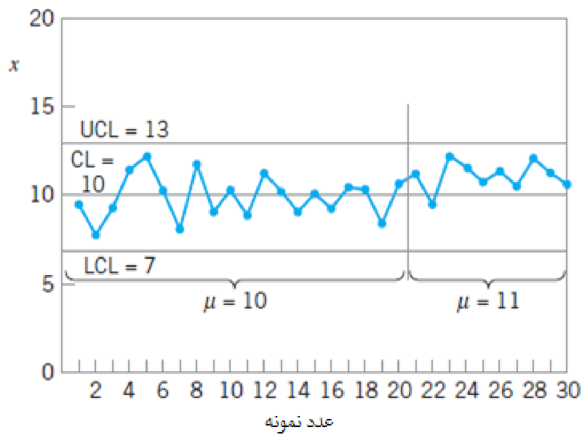
اهداف یادگیری

۱. تنظیم و استفاده از نمودارهای کنترل جمع تجمیعی برای نظارت بر روند میانگین
۲. طراحی نمودار کنترل جمع تجمیعی برای میانگین جهت کسب عملکرد خاص ARL
۳. در نظر گرفتن مشخصه پاسخ اولیه سریع در نمودار کنترل جمع تجمیعی
۴. استفاده از طرح نظارت بر جمع تجمیعی ترکیبی
۵. تنظیم و استفاده از نمودار کنترل میانگین متحرک با وزن متوسط برای نظارت بر روند میانگین
۶. طراحی و نمودار کنترل میانگین متحرک با وزن متوسط نسبت به فرض نرمال بودن، دقیق است.
۷. درک مزیت عملکردی جمع تجمیعی و نمودارهای کنترل جمع تجمیعی برای میانگین نسبت به نمودار کنترل Shewhart
۸. تنظیم و استفاده از نمودار کنترل بر اساس میانگین متحرک معمولی (وزن نشده)

اسلاید ۳

## ۸,۱. نمودار کنترل جمع تجمیعی

شکل ۹/۱. نمودار کنترل Shewhart برای داده های جدول ۹/۱.




اسلاید ۴

نمودار جمع تجمیعی مستقیما شامل تمام اطلاعات بر اساس توالی مقادیر نمونه با در نظر گرفتن جمع تجمیعی انحرافات مقادیر نمونه از مقدار هدف، می باشد. به عنوان مثال، فرض کنید که نمونه ای با اندازه ۱ جمع آوری شده است و $\bar{x}_j$ میانگین نمونه j ام است. بنابراین اگر $\mu$. میانگین روند میانه است، نمودار کنترل جمع تجمیعی با در نظر گرفتن مقدار زیر در مقابل مقدار نمونه i تشکیل می شود:

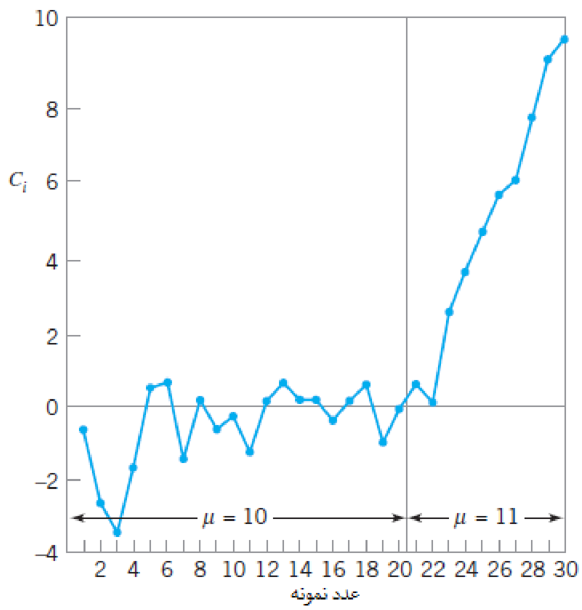
$$C_i = \sum_{j=1}^{i} \left( \bar{x}_j - \mu_0 \right) \tag{9.1}$$

$C_i$ مجموع جمع تجمیعی نامیده می شود و شامل نمونه i ام می گردد. به این دلیل که نمودارهای جمع تجمیعی اطلاعاتی را از چندین نمونه جمع می کنند، بسیار موثرتر از نمودارهای Shewhart برای تشخیص تغییرات روندی کوچک هستند. علاوه بر این، این نمودارها با نمونه هایی با اندازه =۱ بسیار موثر هستند. این امر سبب می شود که نمودار کنترل جمع تجمیعی انتخاب خوبی برای استفاده در صنایع شیمیایی و پردازش باشد که در آن ها زیرگروه های منطقی مکررا اندازه ۱ دارند و در بخش های پراکنده ساخته شده با اندازه گیری خودکار هر بخش و نظارت آنلاین بر روند بطور مستقیم در مرکز کار، قرار می گیرند.

**اسلاید ۵**

**نمودار کنترل جمع تجمیعی**

شکل ۹/۲ نمودار نقطه ای جمع تجمیعی از ستون c جدول ۹/۱



$$C_i = \sum_{j=1}^{i}(x_j - 10)$$
$$= (x_i - 10) + \sum_{j=1}^{i-1}(x_j - 10)$$
$$= (x_i - 10) + C_{i-1}$$

اسلاید ٦

**جمع تجمیعی جدولی**

**جمع تجمیعی جدولی**

$$C_i^+ = \max\left[0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+\right] \qquad (9.2)$$

$$C_i^- = \max\left[0, (\mu_0 - K) - x_i + C_{i-1}^-\right] \qquad (9.3)$$

که مقادیر شروع در آن عبارتند از: $C_0^+ = C_0^- = 0.$

$$K = \frac{\delta}{2}\sigma = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} \qquad (9.4)$$

اسلاید ٧

**مثال ٩/١ جمع تجمیعی جدولی**

جمع تجمیعی جدولی را با استفاده از داده های جدول ٩/١. تنظیم کنید.

**راه حل:** به خاطر بیاورید که مقدار هدف برابر است با ١٠ ، اندازه زیرگروه ١ ، انحراف استاندارد روند ١، و فرض کنید که بزرگی تغییری که به آن می پردازیم برابر با ١/٠ است.
بنابراین، مقدار خارج از کنترل میانگین روند برابر با ١+١٠=١١ است. از جمع تجمیعی جدولی با k=1/2 استفاده می کنیم (زیرا اندازه تغییر برابر با ١/٠σ و σ=١ است).

و H=5 (زیرا مقدار توصیه شده برای وقفه تصمیم گیری برابر با H=5σ=5(١)=٥ است.

جدول ٩/٢ طرح جمع تجمیعی جدولی را نشان می دهد. برای نشان دادن محاسبات، دوره ١ را در نظر بگیرید. معادله برای $C_i^+$ و $C_i^-$ می شود:

$$C_1^+ = \max\left[0, x_1 - 10.5 + C_0^+\right] \quad و \quad C_1^- = \max\left[0, 9.5 - x_1 + C_0^-\right]$$

از آنجاییکه K=0.5 و $\mu_0 = ۱۰$ ، اکنون x1=9.45 بنابراین چون $C_0^+ = C_0^- = ۰$ ،

$$C_1^+ = \max[0, 9.45 - 10.5 + 0] = 0$$

و

$$C_1^- = \max[0, 9.5 - 9.45 + 0] = 0.05$$

برای دوره ۲ می توانیم از معادله زیر استفاده کنیم:

$$C_2^+ = \max\left[0, x_2 - 10.5 + C_1^+\right] = \max\left[0, x_2 - 10.5 + 0\right]$$

و

$$C_2^+ = \max\left[0, x_2 - 10.5 + C_1^+\right] = \max\left[0, x_2 - 10.5 + 0\right]$$

از آنجاییکه $x_2 = 7.99,$ است، خواهیم داشت:

$$C_2^+ = \max[0, 7.99 - 10.5 + 0] = 0$$

**اسلاید ۸**

و

$$C_2^- = \max[0, 9.5 - 7.99 + 0.05] = 1.56$$

پنل های a و b جدول ۹/۲ محاسبات دیگر را خلاصه کرده اند. مقادیر N+ و N- در جدول ۹/۲ دال بر تعداد دوره های متوالی هستند که جمع تجمیعی $C_i^+$ یا $C_i^-$ غیر از صفر بوده اند.

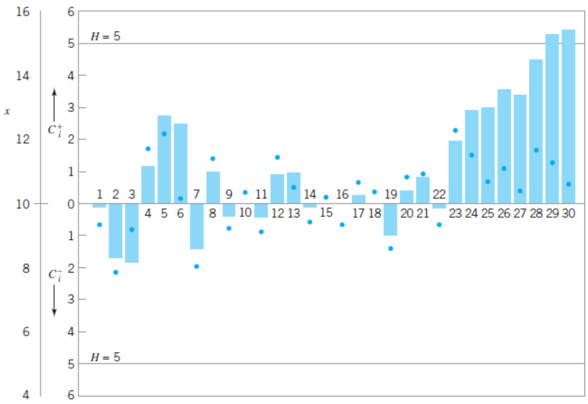
محاسبات جمع تجمیعی در جدول ۹/۲ نشان می دهد که جمع های سمت بالا در دوره ۲۹ برابر است با $C_{29}^+ = 5.28.$ زیرا این اولین دوره ای است که در آن $C_i^+ > H = 5,$ می باشد، می توان نتیجه گرفت که روند در آن نقطه خارج از کنترل است. جمع های تجمیعی جدولی نیز نشان می دهند که تغییر چه زمانی روی می دهد. شمارشگر N+ تعداد دوره های متوالی را ثبت می کند زیرا جمع تجمیعی سمت بالای $C_i^+$ بیشتر از صفر می شود. از آنجاییکه در دوره ۲۹ $N^+ = 7$ ، می توان نتیجه گرفت که این روند در دوره کنترل ۲۲=۷-۲۹ دوام داشته است بطوریکه تغییر احتمالا بین دوره های ۲۲ و ۲۳ روی داده است.

**اسلاید ۹**

**جدول ۹/۲. جمع تجمیعی جدولی برای مثالهای ۹/۱**

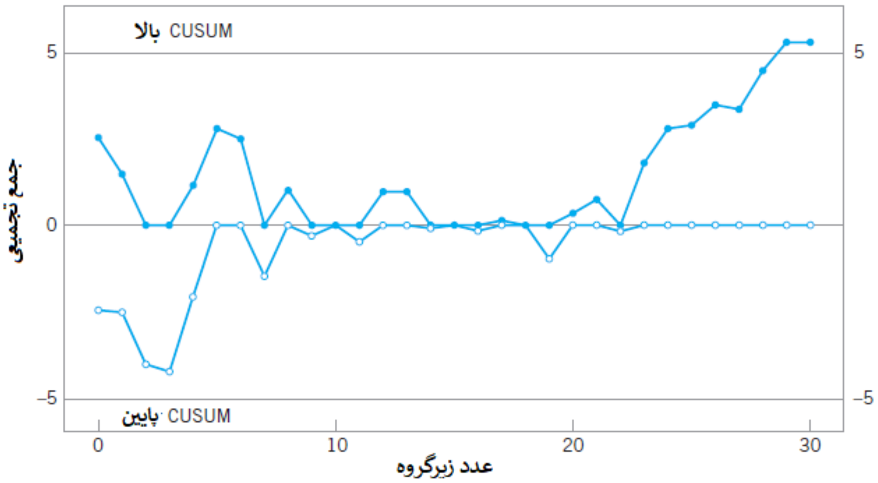
**اسلاید ۱۰**

**نمودار وضعیت جمع تجمیعی**



## اسلاید ۱۱

### نسخه MINITAB نمودار وضعیت جمع تجمیعی




MINITAB به این شکل جمع تجمیعی پایین را محاسبه می کند:

$$C_i^- = \min\left(0, x_i - \mu_0 + k + C_{i-1}^-\right)$$

## اسلاید ۱۲

در وضعیت هایی که در آن تطبیق با برخی از متغیرهای قابل دستکاری برای بازگرداندن روند به مقدار هدف لازم است، می توان از تخمین میانگین روند جدید بعد از تغییر استفاده کرد. این مقدار از معادله زیر بدست می آید:

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \mu_0 + K + \dfrac{C_i^+}{N^+}, & \text{if } C_i^+ > H \\ \mu_0 - K - \dfrac{C_i^-}{N^-}, & \text{if } C_i^- > H \end{cases} \tag{9.5}$$

برای نشان دادن استفاده از معادله ۹٫۵، جمع تجمیعی در دوره ۲۹ با مقدار $C_{29}^{+}=5.28$ را در نظر بگیرید. از معادله ۹٫۵ می توان میانگین روند جدید را اینگونه تخمین زد:

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \mu_0 + K + \frac{C_{29}^{+}}{N^{+}} \\ &= 10.0 + 0.5 + \frac{5.28}{7} \\ &= 11.25\end{aligned}$$

اسلاید ۱۳

## توصیه هایی برای طراحی جمع تجمیعی

جدول ۹٫۳ : عملکرد ARL جمع تجمیعی جدولی با مقادیر k=1/2 و h=4 یا h=5

اسلاید ۱٤

جدول ۹٫٤ : مقادیر k و مقادیر مرتبط h که ARL=370 را برای جمع تجمیعی جدولی دو سویه بدست می دهند.

اسلاید ۱٥

## جمع تجمیعی استاندارد شده

بسیاری از کاربران جمع تجمیعی CUSUM ترجیح می دهند که قبل از انجام محاسبات، متغیر $x_i$ را استاندارد کنند. فرض کنیم

$$y_i = \frac{x_i - \mu_0}{\sigma} \tag{9.8}$$

مقدار استاندارد شده $x_i$ . سپس جمع های تجمیعی استاندارد شده اینگونه تعریف می شوند:

**جمع تجمیعی استانداردشده دو سویه**

$$C_i^{+} = \max\left[0, y_i - k + C_{i-1}^{+}\right] \tag{9.9}$$

$$C_i^{-} = \max\left[0, -k - y_i + C_{i-1}^{-}\right] \tag{9.10}$$

دو مزیت برای استانداردسازی جمع تجمیعی وجود دارد. اولا، بسیاری از نمودارهای جمع تجمیعی اکنون می توانند مقدار مشابه k و h را داشته باشند و انتخاب این پارامترها وابسته به مقیاس نیست ( به این معنی که به σ وابسته نیستند). دوما،

جمع تجمیعی استانداردشده معمولا منجر به یک جمع تجمیعی برای کنترل کردن تنوع می شود، همانطور که در بخش ۹/۱/۸ مشاهده می شود.

**اسلاید ١٦**

**بهبود عملکرد جمع تجمیعی برای تغییرات گسترده: شمای ترکیب جمع تجمیعی-Shewhart**

جدول ۹/۵. مقادیر ARL برای برخی تعدیلات در مقدار اولیه جمع تجمیعی با k=1/2 و h=5 (اگر زیرگروه هایی با اندازه بیشتر از ۱ استفاده شوند، سپس $\sigma = \sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$ می باشد).

**اسلاید ١٧**

**پاسخ اولیه سریع**

جدول ۹/٦ یک جمع تجمیعی با Headstart، میانگین روند برابر با ۱۰۰

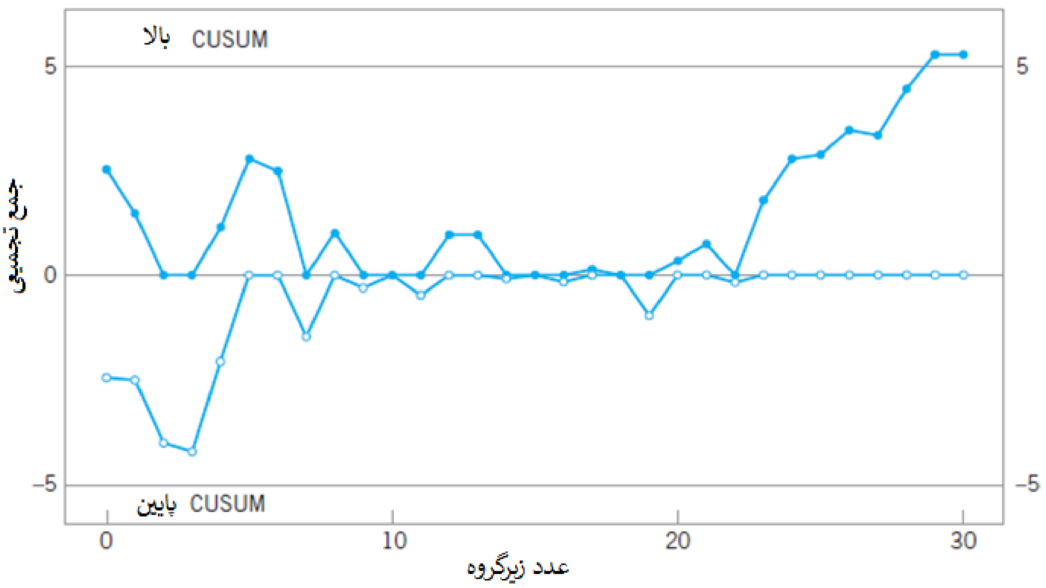
**اسلاید ١٨**

جدول ۹/٧ یک جمع تجمیعی با Headstart، میانگین روند برابر با ۱۰٥

H=12 نشان می دهد که جمع تجمیعی در نمونه ۳ ظاهر می شود. بدون شروع سریع، تا نمونه ٦ علامتی ظاهر نمی شود.

**اسلاید ١٩**

شکل ۹/٤. نمودار وضعیت جمع تجمیعی Minitab برای داده های جدول ۹/۱، نشان دهنده پاسخ سریع اولیه یا مشخصه headstart




**اسلاید ٢٠**

**موارد بیشتر در مورد جمع تجمیعی**

- جمع های تجمیعی اغلب برای تعیین اینکه آیا روند به سمت هدف خاصی تغییر کرده است بکار می روند زیرا محاسبه تطبیق های لازم آسان است.
- جمع های تجمیعی یک سویه اغلب مفید هستند.
- جمع های تجمیعی نیز برای نظارت بر تغییر استفاده می شوند.
- جمع های تجمیعی برای سایر نمونه های آماری (بازه ها، انحرافات استاندارد، شمارش، سهم ها) در دسترس هستند.
- زیرگروه ها و جمع های تجمیعی منطقی

**اسلاید ۲۱**

هرچند که توسعه جمع های تجمیعی جدولی را برای مورد مشاهدات فردی (n=1) ارائه کردیم، به آسانی به مورد میانگین های زیرگروه منطقی که در آن اندازه نمونه بیشتر از ۱ است قابل تعمیم می باشد. در فرمول بالا، صرفا $\bar{x}_i$ را جایگزین $x_i$ کنید (میانگین نمونه یا زیرگروه) و $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$ را جایگزین $\sigma$ نمایید.

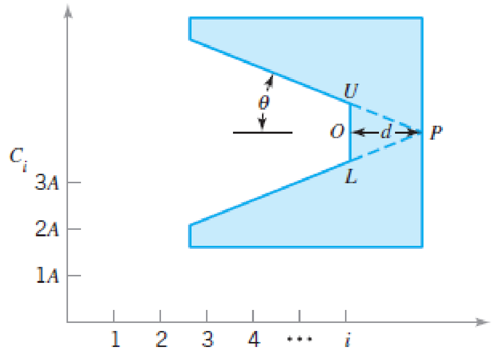
در مورد نمودارهای Shewhart ، استفاده از میانگین های زیرگروه های منطقی اساسا عملکرد نمودار کنترل را بهبود می بخشد. با این حال، این کار همیشه در مورد جمع تجمیعی روی نمی دهد. به عنوان مثال اگر بتوانیم هر نیم ساعت نمونه ای با اندازه برابر با ۱ یا یک نمونه متشکل از زیرگروه منطقی با اندازه ۵ را هر ۲/۵ ساعت انتخاب کنیم (هر دو انتخاب تراکم نمونه برداری مشابه ای ندارند)، جمع تجمیعی اغلب با انتخاب n=1 هر نیم ساعت بهتر کار می کند. برای بحث بیشتر در اینباره ، به هاوکینز و هول (۱۹۹۸) مراجعه کنید. فقط اگر اقتصاد معنادار مقیاس یا دلایل ارزشمند دیگری برای داشتن نمونه های بیشتر از واحد وجود داشت، استفاده از $n > 1$ را برای جمع تجمیعی در نظر بگیرید.

یک دلیل عملی برای استفاده از زیرگروه های منطقی با اندازه $n > 1$ اینست که اکنون می توانیم جمع تجمیعی روی نمونه واریانس را تنظیم کرده و از آن برای نظارت بر تنوع روند استفاده کنیم. جمع های تجمیعی برای واریانس با جزییات توسط هاوکینز و اول (۱۹۹۸) مورد بحث قرار گرفته اند؛ مقاله چانگ و گان (۱۹۹۵) نیز توصیه می شود. ما فرض می کنیم که مشاهدات معمولا

**اسلاید ۲۲**

**ماسک V جمع تجمیعی**

شکل ۹/۵ یک نمونه ماسک V




جمع تجمیعی جدولی و طرح ماسک V برابر هستند اگر

$$k = A\tan\theta \qquad (9.17)$$

و

$$h = A\, d\tan(\theta) = dk \qquad (9.18)$$

**اسلاید ۲۳**

ما به شدت عدم استفاده از روند ماسک V را پیشنهاد می کنیم. برخی از مضرات و مسائل مربوط به این طرح عبارتتند از:

۱. مشخصه شروع که در عمل بسیار مفید است، را نمی توان با ماسک V بکار برد.
۲. گاهی اوقات تعیین میزان تعمیم و گسترش بازوهای V بسیار دشوار می شود و بنابراین تفسیر را برای متخصصین دشوار می کند.
۳. شاید بزرگترین مشکل مربوط به ماسک V ابهام مربوط به بتا و آلفا در روند طراحی جانسون باشد.

جدول ۹/۸ مقادیر اصلی ARL0 برای طرح ماسک V طراحی شده با استفاده از روش جانسون (برگرفته از جدول ۲ در وودال و آدامز، ۱۹۹۳)

**اسلاید ۲٤**

آدامز، وودال و لوری (۱۹۹۲) اشاره کرده اند که تعریف ۲α به عنوان احتمال یک هشدار اشتباه ، درست نیست. اساسا، ۲α نمی تواند احتمال خطا یا هشدار خطا روی هر تک نمونه باشد زیرا این احتمال در طول زمان روی جمع تجمیعی تغییر می کند و همچنین نمی تواند احتمال کسب یک هشدار اشتباه باشد (این احتمال البته وجود دارد). در واقع دو آلفا باید سهم طولانی مدت از مشاهدات منجر به هشدارهای خطا باشد. در این صورت، در ARL تحت کنترل، باید برابر با $\mathrm{ARL}_0 = 1/(2\alpha)$. باشد. با این حال، روش طراحی جانسون مقادیری از $\mathrm{ARL}_0$ را تولید می کند که اساسا بیشتر از $1/(2\alpha)$ است.

**اسلاید ۲۵**

### ۹/۱/۱۲ جمع تجمیعی خود آغاز

جمع تجمیعی CUSUM معمولا به عنوان روند دوره دوم استفاده می شود؛ به این معنی که برای نظارت بر روندی بکار می رود که تقریبا در روند اول کامل شده و بیشتر دلایل مربوطه به آن از بین رفته اند. در فاز دوم، معمولا اینگونه فرض می کنیم که پارامترهای روند بخوبی تخمین زده شده اند. در عمل، این فرضیه ای بسیار مهم است، زیرا استفاده از تخمین های پارامترها بجای مقادیر ارزشمند بر میانگین طول عملکرد نمودار کنترل تاثیر دارد ( این مسئله در فصل ٤ مورد بحث قرار گرفت؛ همچنین مراجعه شود به مقاله مروری انجام شده توسط جنسن و همکاران، ۲۰۰٦). نمودارهای کنترل که برای تشخیص تغییرات اندک طراحی شده اند، از جمله CUSUM ، بویژه به این فرضیه حساس هستند.

رویکرد دیگر بجای CUSUM (جمع تجمیعی) استفاده از روند جمع تجمیعی خودآغاز منسوب به هاوکینز (۱۹۸۷) است. جمع تجمیعی خود آغاز برای میانگین متغیر تصادفی با توزیع نرمال به سادگی قابل اعمال است. فورا و بدون نیاز به تخمین پارامترهای روند، در این مورد $\mu$ میانگین و واریانس $\mu$ ، در نمونه فاز یک، قابل اجرا هستند.

اگر $\bar{x}_n$ میانگین اولین مشاهدات n باشد و اگر

$$w_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2$$

مجموع مشتقات مربع از میانگین این مشاهدات باشد. فرمول محاسبه برای بروزرسانی این مقادیر بعد از مشاهده جدید خواهد بود:

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} + \frac{x_n - \bar{x}_{n-1}}{n}$$
$$w_n = w_{n-1} + \frac{(n-1)(x_n - \bar{x}_{n-1})^2}{n}$$

واریانس نمونه اولین مشاهدات n برابر است با $s_n^2 = w_n/(n-1)$ . با استفاده از معادله زیر هر روند جدید متوالی را برای مواردی که n بزرگتر از یا برابر با ۳ است استانداردسازی کنید:

$$T_n = \frac{x_n - \bar{x}_{n-1}}{s_{n-1}}$$

**اسلاید ۲٦**

. اگر مشاهدات توزیع نرمال داشتند، توزیع $\sqrt{\frac{n-1}{n}}T_n$ در توزیع t با n-1 درجه آزادی قرار دارد. توزیع تجمیعی $T_n$ برابر است با

$$P(T_n \le t) = F_{n-2}\left(t\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)$$

که در آن $F_n$ توزیع تجمیعی t با n-1 درجه آزادی است. مشخص می شود که اگر حوزه دنباله برای هر متغیر تصادفی متوالی به یک عدد معمول تبدیل شود، یک متغیر تصادفی جدید بدست می آوریم که دقیقا به عنوان متغیر تصادفی نرمال استاندارد توزیع شده است. به این معنی که اگر $\Phi^{-1}$ توزیع تجمیعی هنجار معکوس باشد، تبدیل

$$U_n = \Phi^{-1}[F_{n-2}(a_nT_n)] \quad \text{where } a_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

مقدار جمع تجمیعی $T_n$ را به متغیر تصادفی نرمال استاندارد تبدیل می کند. مشخص می شود که مقادیر $U_n$ از لحاظ آماری مستقل هستند ( این مسئله مشخص نیست، زیرا مقادیر متوالی $U_n$ نقاط داده ای مشابه ای دارد)، بنابراین می توان تمام مقادیر $U_n$ را برای $n \ge 3$ روی جمع تجمیعی N(۰,۱) مشخص کرد. این امر به خوبی از مسئله استفاده از نمونه بزرگ داده های فاز یک برای تخمین پارامترهای روند برای جمع تجمیعی معمولی اجتناب می کند.

**اسلاید ۲۷**

جدول ۹/۹ محاسبات مربوط به جمع تجمیعی خود آغاز

**اسلاید ۲۸**

## نمودار کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی

میانگین متحرک وزن شده نمایی برابر است با:

$$z_i = \lambda x_i + (1-\lambda)z_{i-1} \qquad (9.22)$$

که در آن $0 < \lambda \le 1$ ثابت است و مقدار اولیه (لازم برای اولین نمونه در i=1 ) هدف روند است بطوریکه

$z_0 = \mu_0$

گاهی اوقات میانگین داده اولیه به عنوان مقدار اولیه میانگین متحرک وزن شده نمایی استفاده می شود، بطوریکه $z_0 = \bar{x}$. باشد.

**اسلاید ۲۹**

$$z_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j x_{i-j} + (1-\lambda)^i z_0$$

شکل ۹/۶. وزن های میانگین نمونه گذشته

**اسلاید ۳۰**

$$\sigma_{z_i}^2 = \sigma^2 \left( \frac{\lambda}{2-\lambda} \right) \left[ 1 - (1-\lambda)^{2i} \right]$$

**نمودار کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی**

$$\text{UCL} = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} \left[ 1 - (1-\lambda)^{2i} \right]} \quad (9.25)$$

$$\text{خط مرکزی} = \mu_0$$

$$\text{LCL} = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} \left[ 1 - (1-\lambda)^{2i} \right]} \quad (9.26)$$

**محدود کنترل وضعیت ثابت**

$$\text{UCL} = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \quad (9.27)$$

$$\text{LCL} = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \quad (9.28)$$

**اسلاید ۳۱**

**مثال ۹/۲. ساخت نمودار کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی**

یک نمودار کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی با $\lambda = 0.10$، و $L = 2.7$ برای داده های جدول ۹/۱.

**راه حل**

بیاد بیاورید که مقدار هدف میانگین برابر با ۱۰ و انحراف استاندارد برابر با ۱ است. محاسبات برای نمودار کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی در جدول ۹/۱۰ خلاصه شده است و نمودار کنترل (از مینی تب) در شکل ۹/۷ نشان داده شده است.
برای نشان دادن محاسبات، اولین مشاهده را در نظر بگیرید

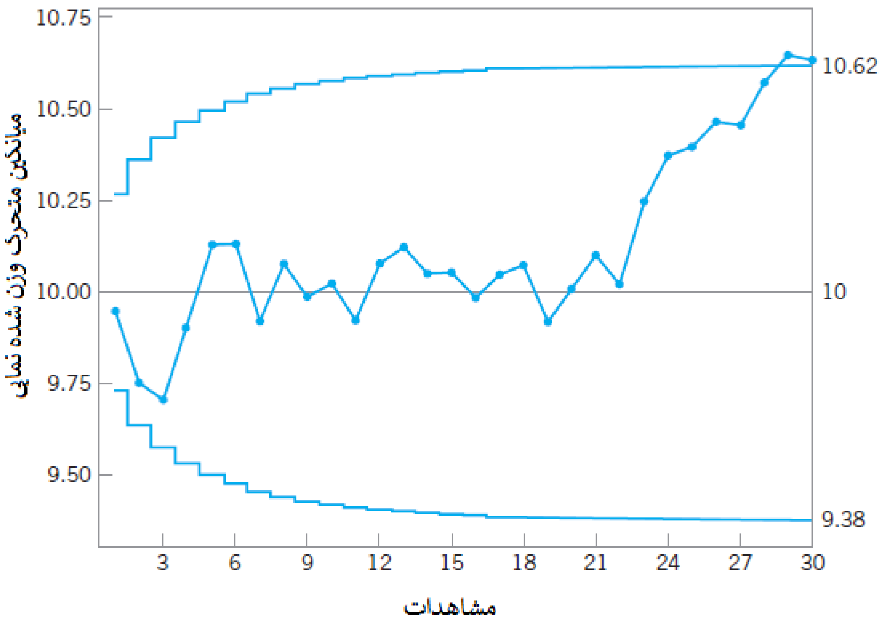
$x_1 = 9.45$ . اولین ارزش میانگین متحرک وزن شده نمایی برابر است با :

$$z_1 = \lambda x_1 + (1-\lambda)z_0 \\ = 0.1(9.45) + 0.9(10) \\ = 9.945$$

جدول ۹/۱۰ محاسبات میانگین متحرک وزن شده نمایی برای مثال ۹/۲.

**اسلاید ۳۲**

شکل ۹/۷. نمودار کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی برای مثال ۹/۲.




**اسلاید ۳۳**

بنابراین $z_1 = 9.945$ اولین ارزش نشان داده شده روی نمودار کنترل در شکل ۹/۷ است. دومین ارزش نمودار کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی برابر است با :

$$z_2 = \lambda x_2 + (1-\lambda)z_1 \\ = 0.1(7.99) + 0.9(9.945) \\ = 9.7495$$

مقادیر دیگر آمار ارزش نمودار کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی به همین شکل محاسبه شده اند. محدودیت های کنترل در شکل ۹/۷ با استفاده از معادله های ۹/۲۵ و ۹/۲۶ یافت شده است. برای دوره i=1 ،

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \mu_0 + L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]} \\ &= 10 + 2.7(1)\sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}\left[1-(1-0.1)^{2(1)}\right]} \\ &= 10.27 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \text{LCL} &= \mu_0 - L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]} \\ &= 10 - 2.7(1)\sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}\left[1-(1-0.1)^{2(1)}\right]} \\ &= 9.73 \end{aligned}$$

برای دوره ۲ ، محدودیت ها عبارتند از:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \mu_0 + L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]} \\ &= 10 + 2.7(1)\sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}\left[1-(1-0.1)^{2(2)}\right]} \\ &= 10.36 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \text{LCL} &= \mu_0 - L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]} \\ &= 10 - 2.7(1)\sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}\left[1-(1-0.1)^{2(2)}\right]} \\ &= 9.64 \end{aligned}$$

توجه کنید که از شکل ۹/۷، محدودیت های کنترل در عرض با افزایش i از $i= 1,2,....,$ ، افزایش پیدا می کند تا زمانیکه در مقادیر وضعیت ثابت با توجه به معادله ۹/۲۷ و ۹/۲۸، تثبیت می شوند.

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \mu_0 + L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \\ &= 10 + 2.7(1)\sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}} \\ &= 10.62 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \text{LCL} &= \mu_0 - L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \\ &= 10 - 2.7(1)\sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}} \\ &= 9.38 \end{aligned}$$

میانگین کنترل وزن نمایی شده در شکل ۹/۷ در مشاهده ۲۸ مشخص می شود، بنابراین می توان نتیجه گرفت که روند خارج از کنترل است.

**اسلاید ۳٤**

**طراحی میانگین متحرک وزن شده نمایی**

شکل ۹/۱. میانگین طول اجرا برای چندین طرح کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی (برگرفته از لوکاس و ساکوکی، ۱۹۹۰).

**اسلاید ۳٥**

یک نگرانی بالقوه درباره میانگین متحرک وزن شده نمایی در مورد مقادیر اندک $\lambda$ وجود دارد. اگر ارزش میانگین متحرک وزن نمایی شده یک سمت از خط مرکزی باشد زمانیکه تغییر در میانگین در جهت مخاللف باشد، چندین دوره طول می کشد تا میانگین متحرک وزن شده نمایی به تغییر واکنش نشان دهد، زیرا $\lambda$ کوچک داده های جدید را خیلی سنگین وزن نمی کند. این تاثیر اینرسی نامیده می شود. می تواند تاثیر و کارایی میانگین متحرک وزن شده نمایی در تشخیص تغییر را کاهش دهد.

وودال و محمود (۲۰۰۵) ویژگیهای اینرسی چند نوع مختلف از نمودارهای کنترل را بررسی کرده اند. آنها مقاومت سیگنال نمودار کنترل را به عنوان بزرگترین انحراف استاندارد میانگین نمونه یا مقدار در کنترلی که به سیگنال آنی خارج از کنترل منتهی نمی شود، تعریف کرده اند. برای نمودار Shewhart $\bar{x}$ ، مقاومت سیگنال $SR(\bar{x}) = L$ است. ضرب برای کسب محدودیت های کنترل استفاده شده است. بنابراین، مقاومت سیگنال ثابت است. برای نمودار کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی ، مقاومت سیگنال برابر است با:

$$SR(EWMA) = \frac{L\sqrt{\dfrac{\lambda}{2-\lambda}} - (1-\lambda)w}{\lambda}$$

که در آن w ارزش آماری میانگین متحرک وزن شده نمایی است. برای میانگین متحرک وزن نمایی شده، حداکثر مقدار مقاومت سیگنال روی تمام ارزش های میانگین متحرک وزن شده نمایی میانگین گیری شده و برابر است با $L\sqrt{(2-\lambda)/\lambda}$، اگر نمودار محدودیت های غیرنشانه ای داشته باشد. این نتایج برای اندازه نمونه بکار می روند زیرا آنها از لحاظ تغییر ، چندین خطای استاندارد را بیان کرده اند.

**اسلاید ۳٦**

مشخصا مقاومت سیگنال در مورد نمودار کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی به مقدار انتخاب شده برای $\lambda$ با مقادیر اندک منجر به مقادیر بزرگتر حداکثر مقاومت سیگنال، بستگی دارد. این امر چندان مطلوب نیست، زیرا تقریبا همیشه می خواهیم از میانگین متحرک وزن شده نمایی با مقادیر اندک $\lambda$ استفاده کنیم زیرا نتایج در عملکرد ARL در تشخیص تغییرات اندک، بهتر

هستند. همانطور که در بخش ۹/۲/۳ مشاهده خواهیم کرد، مقادیر اندک $\lambda$ نیز مطلوب هستند زیرا نمودار میانگین متحرک وزن شده نمایی را نسبت به هنجاری داده های روند ، غیرحساس هستند.
وودال و محمود (۲۰۰۵) همیشه استفاده از نمودارShewhart را در کنار میانگین متحرک وزن نمایی شده به عنوان راهی برای مقابله با مقاومت سیگنال، توصیه می کنند.

مانند جمع تجمیعی، میانگین متحرک وزن شده نمایی بخوبی در مقابل تغییرات اندک عمل می کند اما به تغییرات بزرگتر به سرعت نمودار Shewhart واکنش نشان نمی دهد. راه خوبی برای بهبود بیشتر حساسیت روند نسبت به تغییرات بزرگ بدون قربانی کردن توانایی تشخیص سریع تغییرات اندک، ترکیب نمودار Shewhart با میانگین متحرک وزن شده نمایی است. این روندهای ترکیب شده در مقابل تغییرات اندک و بزرگ موثر هستند. هنگام استفاده از این طرح ها، استفاده کمی گسترده تر از محدودیت های معمول روی نمودار Shewhart کمک کننده خواهد بود. همچنین می تواند هر دو $x_i$ و آمار میانگین متحرک وزن شده نمایی $z_i$ را روی نمودار کنترل مشابه همراه با محدودیت های Shewhart و میانگین متحرک وزن شده نمایی، نشان داد. این امر منجر به تولید یک نمودار برای روند کنترل ترکیب شده می شود که به سرعت عمل می کند و در تفسیر سازگار است. زمانیکه طرح ها بصورت کامپیوتری تعمیم یافته اند، رنگ ها یا نشانه های طرح مختلف را می توان برای دو مجموعه از محدودیت  ها و آمار کنترل استفاده کرد.

**اسلاید ۳۷**

**نیرومندی میانگین متحرک وزن شده نمایی برای داده های روند غیرهنجار**

جدول ۹/۱۲ ARL تحت کنترل برای میانگین متحرک وزن شده نمایی و نمودارهای کنترل فردی برای توزیع های گامای مختلف

**اسلاید ۳۸**

جدول ۹/۱۳ ARL های تحت کنترل برای میانگین متحرک وزن شده نمایی و نمودارهای کنترل فردی برای توزیع های مختلف t

**اسلاید ۳۹**

**زیرگروه های منطقی**

نمودار کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی اغلب با اندازه گیریهای فردی استفاده می شود. با این حال، اگر زیرگروه منطقی به اندازه n >1 در نظر گرفته شود، سپس باید فقط بجای $x_i$ ، از $\bar{x}_i$ و بجای $\sigma$ از $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$

در معادله های پیشین استفاده کرد.

**اسلاید ٤٠**

## تعمیم میانگین متحرک وزن شده نمایی

- مشخصه پاسخ اولیه سریع
- نظارت بر تنوع
- نظارت بر داده های شمارش
- میانگین متحرک وزن شده نمایی به عنوان پیش بینی کننده سطح روند

**اسلاید ٤١**

## ۹/۳. نمودار کنترل میانگین متحرک

فرض کنید که مشاهدات فردی جمع آوری شده اند و فرض کنید $x_1, x_2, \ldots$ دال بر این مشاهدات باشد. میانگین متحرک بازه w در زمان i اینگونه تعریف می شود:

$$M_i = \frac{x_i + x_{i-1} + \cdots + x_{i-w+1}}{w} \tag{9.37}$$

به این معنی که در دوره زمانی i ، قدیمی ترین مشاهدات در مجموعه میانگین متحرک افتاده و جدیدترین آنها به مجموعه اضافه شده است. واریانس میانگین متحرک $M_i$ برابر است با:

$$V(M_i) = \frac{1}{w^2} \sum_{j=i-w+1}^{i} V(x_j) = \frac{1}{w^2} \sum_{j=i-w+1}^{i} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{w} \tag{9.38}$$

بنابراین، اگر $\mu_0$ نشان دهنده مقدار هدف میانگین استفاده شده به عنوان خط مرکزی نمودار کنترل باشد، محدوده کنترل به سیگما برای $M_i$ برابر است با:

$$\mathrm{UCL} = \mu_0 + \frac{3\sigma}{\sqrt{w}} \tag{9.39}$$

و

$$\mathrm{LCL} = \mu_0 - \frac{3\sigma}{\sqrt{w}} \tag{9.40}$$

**اسلاید ٤٢**

## مثال ۹/۳. نمودار کنترل میانگین متحرک

یک نمودار کنترل میانگین متحرک را برای داده های جدول ۹/۱ با استفاده از w=5 تنظیم کنید.

**راه حل**

مشاهدات $x_i$ برای دوره های $1 \le i \le 30$ در جدول ۹/۱۴ نشان داده شده است. آمار نشان داده شده روی نمودار کنترل میانگین متحرک خواهد بود:

$$M_i = \frac{x_i + x_{i-1} + \cdots + x_{i-4}}{5}$$

برای دوره های زمانی $i \ge 5$. برای دوره های زمانی $i < 5$، میانگین مشاهدات برای دوره های ۱,۲,...,i طرح شده است. مقادیر این میانگین متحرک در جدول ۹/۱۴ نشان داده شده است.

جدول ۹/۱۴ نمودار میانگین متحرک برای مثال ۹/۳

**اسلاید ۴۳**

محدودیت های کنترل برای نمودار کنترل میانگین متحرک را می توان به سادگی از معادلات ۹/۳۹ و ۹/۴۰ بدست آورد. از آنجاییکه ما می دانیم $\sigma = 1.0$، خواهیم داشت:

$$\text{UCL} = \mu_0 + \frac{3\sigma}{\sqrt{w}} = 10 + \frac{3(1.0)}{\sqrt{5}} = 11.34$$

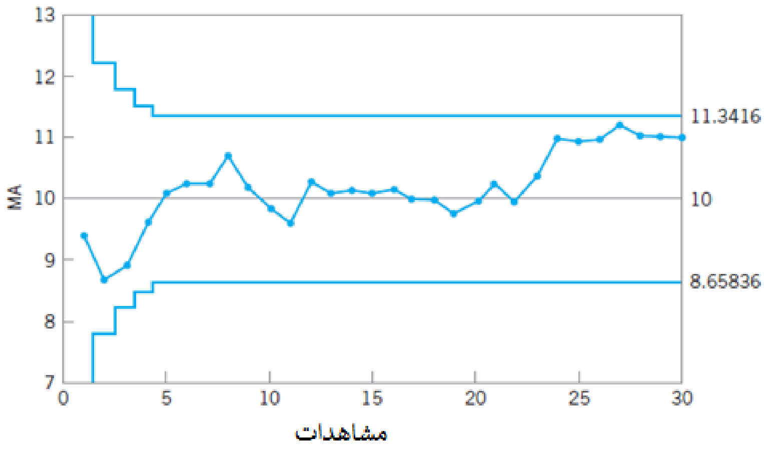
و

$$\text{LCL} = \mu_0 - \frac{3\sigma}{\sqrt{w}} = 10 - \frac{3(1.0)}{\sqrt{5}} = 8.66$$

محدودیت های کنترل برای $M_i$ برای دوره های $i \ge 5$ بکار می رود. برای دوره های $0 < i < 5$، محدودیت های کنترل با $\mu_0 \pm 3\sigma/\sqrt{i}$ مشخص می شوند. یک روند جایگزین که از کاربرد محدودیت های کنترل خاص برای دوره های $i < w$ اجتناب می کند، استفاده از نمودار Shewhart معمولی است تا زمانیکه حداقل میانگین نمونه w بدست بیاید.

نمودار کنترل میانگین متحرک در شکل ۹/۸ نشان داده شده است. هیچ نقطه ای از محدودیت های کنترل فراتر نمی رود. دقت کنید که برای دوره های اولیه $i < w$، محدودیت های کنترل گسترده تر از مقادیر ثابت نهایی هستند. میانگین های متحرک که کمتر از دوره w هستند، بسیار همبسته هستند که اغلب الگوهای تفسیر روی نمودار کنترل را پیچیده می کند. این مسئله به سادگی با بررسی شکل ۹/۸ قابل مشاهده است.

شکل ۹/۸ نمودار کنترل میانگین متحرک با w=5 . مثال ۹/۳




**اسلاید ٤٤**

**اصطلاحات و مفاهیم مهم**

محاسبات ARL برای جمع تجمیعی CUSUM

طول اجرای متوسط

روند ترکیبی Shewhart و جمع تجمیعی

نمودار کنترل جمع تجمیعی

نمودار وضعیت جمع تجمیعی

مداخله تصمیم

طراحی جمع تجمیعی

طراحی نمودار کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی

نمودار کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی

پاسخ اولیه سریع یا مشخصه شروع برای جمع تجمیعی

پاسخ اولیه سریع یا مشخصه شروع برای یک نمودار کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی

نمودار کنترل میانگین متحرک

جمع تجمیعی یک سویه

نمودار کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی پویسون

مقدار ارجاع

دقت نمودار کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی نسبت به هنجار بودن

جمع تجمیعی مقیاس

جمع تجمیعی خود آغاز

مقاومت سیگنال یک نمودار کنترل

جمع تجمیعی استاندارد شده

جمع تجمیعی جدولی یا الگوریتمی

شکل ماسک V جمع تجمیعی

**اسلاید ٤٥**

**اهداف یادگیری**

- تنظیم و استفاده از نمودارهای کنترل جمع تجیمعی برای نظارت بر میانگین روند
- طراحی نمودار کنترل جمع تجمیعی برای میانگین جهت کسب عملکرد خاص ARL
- در نظر گرفتن مشخصه پاسخ اولیه سریع در نمودار کنترل جمع تجمیعی
- استفاده از طرح نظارت ترکیبی Shewhart و جمع تجمیعی
- تنظیم و استفاده از نمودار کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی برای نظارت بر میانگین روند
- طراحی نمودرا کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی برای میانگین جهت کسب عملکرد ویژه ARL
- درک دلیل مقاومت نمودار کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی نسبت به فرض هنجار بودن
- درک مزیت عملکرد جمع تجمیعی و نمودار کنترل میانگین متحرک وزن شده نمایی نسبت به نمودار کنترل Shewhart
- تنظیم و استفاده از نمودار کنترل بر اساس میانگین متحرک معمولی (وزن نشده)